b) $f(x) \geq \frac{1}{x}$ pour x>0 et $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x}) = +\infty$

d'où $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

2) a) pour x<0

$2-\sin(\frac{1}{x}) \geq 1 \Rightarrow \frac{2-\sin(\frac{1}{x})}{x} \leq \frac{1}{x}$ (car x<0)

$\Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{x}$

b) $f(x) \leq \frac{1}{x}$ pour x<0 et $\lim_{x\to 0^-}(\frac{1}{x}) = -\infty$

d'où $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

Rq : f n'admet pas de limite en 0

EX 19 :

$f(x) = \frac{2x.\sin x}{1+x^2}$

1) a) $|x.f(x)| = \frac{2x^2.|\sin x|}{1+x^2}$

* *pour* $x = 0$ *le resultat est evident*

* *pour* $x \neq 0$ $1+x^2 \geq x^2 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow \frac{2x^2.|\sin x|}{1+x^2} \leq 2|\sin x| \Rightarrow |x.f(x)| \leq 2$ (car $|\sin x| \leq 1$)

b) pour $x \neq 0$

$|x.f(x)| \leq 2 \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{2}{|x|}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{|x|} = 0$ d'où $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

2) on pose $X = \frac{\pi}{2} - x$

$x \to -\infty$

$X \to +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{(\pi-2x)\cos x}{1+(\frac{\pi}{2}-x)^2} = \lim_{X\to+\infty} \frac{2X\cos(\frac{\pi}{2}-X)}{1+X^2}$

$= \lim_{X\to+\infty} \frac{2X.\sin X}{1+X^2} = \lim_{X\to+\infty} f(X) = 0$

EX 20 :

1) $-1 \leq -\cos x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2-\cos x \leq 3$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\cos x} \leq 1$

2) * $f(x) = \frac{x}{2-\cos x}$

pour x>0 : $\frac{1}{2-\cos x} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{3}x$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}x = +\infty$ d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

* $g(x) = \frac{x+\cos x}{2-\cos x}$

$\cos x \geq -1 \Rightarrow x+\cos x \geq x-1$

pour x>1

$x+\cos x \geq x-1$; $\frac{1}{2-\cos x} \geq \frac{1}{3}$

d'où $g(x) \geq \frac{1}{3}(x-1)$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}(x-1) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

EX 21 :

1) $f(x) = \frac{\cos(3x-1)}{x}$

$-1 \leq \cos(3x-1) \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{x} \leq \frac{\cos(3x-1)}{x} \leq \frac{1}{x}$ pour x>0

$\Rightarrow \frac{-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to+\infty}(\frac{-1}{x}) = \lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}) = 0$ d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2) $f(x) = 4x^2 - 3\cos x$

$\cos x \leq 1 \Rightarrow -3\cos x \geq -3 \Rightarrow 4x^2 - 3\cos x \geq 4x^2 - 3$

$\Rightarrow f(x) \geq 4x^2 - 3$

$\lim_{x\to+\infty} 4x^2 - 3 = +\infty$ d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3) $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{1-2x} \geq \frac{\sin x}{1-2x} \geq \frac{1}{1-2x}$ pour $x > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{1-2x} \leq f(x) \leq \frac{-1}{1-2x}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-2x} = 0$ d'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn